استعارات الأرثماطيقا
Metaphors of arithmetic

عـماد محـنان

ملخَّص

أبدت الدِّراسات العربيّة اِهتمامًا كبيرًا بنظريّة لايكوف ودجونسون التَّصوّريّة حول الإستعارة Metaphors We Live by (Lakoff et Johnson, 1980) ولكنّ العمل العرفاني المهمّ الذي أنتجه لايكوف ونوناز بعد نحو عشرين عامًا (Lakoff et Nunez, 2000) حول أصل الرياضيات Where Mathematics Comes From لقيَ اِستقبالًا ضعيفًا في الثّقافة العربيّة، ولم يُعنَ أحد إلى الآن، فيما نعلم، بترجمته إلى اللغة العربيّة. فرغم أنَّ هذا العمل يُركِّز النَّظر على الإستعارات التَّصوّريّة البانية لمختلف الفروع الرياضيّة والقيمة الإبستيمولوجيّة التي يكتسيها الطّرح العرفاني الإستعاري بالنسبة إلى فلسفة العلوم وتاريخ الرياضيات على وجه التّحديد والمباحث الفلسفيّة والدّلاليّة المتّصلة بالإستعارة، فإنّ محاولات اِستثماره في البحث العلمي ظلّت محتشمة. ويرمي عملنا هذا، إلى اِستثمار ما تعلَّق بالإستعارات الأرثماطيقيّة بأصنافها الأربعة، بما في ذلك توسيعها في الخوارزميّات الحسابيّة المركّبة. وذلك من أجل مناقشة بعض المفاهيم الأساسيّة المتعلّقة بإستعارات الأرثماطيقا. وتتّصل إشكاليّة عملنا، على وجه الدقّة، بكيفيّة بناء جهاز مفاهيمي للإستعارة التّصوّريّة اِنطلاقًا من مناقشات المفاهيم المركزيّة في نظريّة لايكوف ونوناز. وتتّبع معالجة هذه الإشكاليّة منحيين: منحى اِختباريّ نُعالج فيه أمثلة من أعمال الحساب سعيًا إلى بيان الآليّات الإستعاريّة المتحكّمة فيها، ومنحى نقديّ إبستيمولوجي يهدف إلى تبيُّن الحدود الفاصلة بين العلمي (علوم الدّماغ) والفلسفي (الإبستيمولوجيا العرفانيّة). ويجمع بين المنحيين الهدف التأصيلي من خلال اِستعادة السؤال التراثي كما صاغه اِبن البنّاء المرّاكشي في كتاب "الرّوض المريع" اِستنادًا إلى نظريّة النّسبة الرياضيّة في فهم مشكلة المجاز.

الكلمات المفاتيح: الإستعارة. النّظام العشري. المجال. المنزلة. القيمة.

Abstract

Arab studies have shown considerable interest in Lakoff and Johnson's theory of conceptual metaphor (Lakoff and Johnson, 1980). However, the important work written nearly twenty years later by Lakoff and Nunez (2000) on the origin of mathematic, (i.e., where mathematics comes from), was poorly received in the Arab culture, and to our knowledge, it is not yet translated into the Arabic language. Although this work focuses on the conceptual metaphors underlying various branches of mathematics and the epistemological value of the metaphorical approach for the philosophy of science and the history of mathematics in particular, as well as for philosophical and semantic debates on metaphor, attempts to exploit it in scientific research have remained modest. In this context, this study aims to delve into some issues that are related to the four types of metaphors in arithmetic, including their extension into complex arithmetic algorithms, to discuss some of the basic concepts related to arithmetic metaphors. The problem of our work relates precisely to how to construct a conceptual apparatus for the conceptual metaphor, based on discussions of the central concepts in Lakoff and Nunez's theory. Addressing this problem follows two approaches: an experimental approach in which we examine examples of mathematical operations to demonstrate the metaphorical mechanisms structuring them, and a critical epistemological approach that aims to clarify what distinguishes cognition (brain sciences) from philosophy (epistemology). The two approaches combine the original goal by restoring the traditional question as formulated by Ibn al-Banna al-Marrakushi in "Al-Rawd al-Maari'," employing the theory of mathematical proportions to understand issues related to rhetoric, such as metaphors.

Keywords: metaphor; mathematics; arithmetic; cognition; philosophy; epistemology.

مقدّمة

يتنزَّل هذا العمل، كما يُبيّنه التّمشي المزدوج النّقدي الإختباري المتّبع فيه إلى اِستكمال محاولات بحث سابقة تعلّقت بالإستعارة في النصّ الرياضي (محنان، 2015) وبإستعاريّة النّظام العددي العشري والخوارزميّات والطّرق الحسابيّة المجراة في نطاق العمليّات الحسابيّة الأوَّليّة (محنان، 2023)، وترتبط بخيار منهجي يهدف إلى إنتاج جهاز مفاهيمي دلالي عرفاني متولِّد من النّظريات العرفانية الحديثة، ومن دراسة الآليّات الإستعاريّة المتحكمة في العمليّات الحسابيّة البسيطة (الجمع والطّرح) والمركّبة (الضرب والقسمة).

من أطروحات مقاربة لايكوف ونوناز العرفانيّة أنَّ نظرتنا إلى الرّياضيّات ليست نظرة رياضيّة. ولا يمكن للرّياضيّات، بحسب هذا الطّرح العرفاني، أن تتّخذ من نفسها موضوعًا للنّظر. وليس أدلّ على ذلك من اِنتقال مفهوم العدد على مدى تاريخه الطّويل بين الرّؤى السِّحريّة والدّينيّة والفلسفيّة والإبستيمولوجيّة وصولًا إلى الرّؤية العرفانيّة التي تردّ تصوّر

العدد والأنظمة العدديّة إلى ضروب من الإستعارات. ويهدف هذا العمل البحثي إلى مساءلة إشكاليّة تصوُّر العدد من داخل الرّؤية العرفانيّة التي وضعها (لايكوف ونوناز، 2000) للرّياضيّات، وطرحا فيها مشكلة عجز الرّياضيات عن فهم نفسها بنفسها من خلال أدواتها ومفاهيمها، واقترحا أربع إستعارات تصوّريّة بها نفهم المجموعات العدديّة والعمليّات الحسابيّة، فضلًا عن آليّات تصوّريّة أخرى تختصُّ بها موجودات عدديّة كالصّفر أو مفاهيم عدديّة كاللانهاية. ومن أهداف هذا العمل أيضًا شرح الأُسس النّظريّة المفهوميّة التي تقوم عليها مقاربة لايكوف ونوناز العرفانية وبيان أنّها ليست تجاوزًا نهائيًا للرّؤى الأفلاطونيّة والحدسيّة والشكلانيّة للرّياضيّات بقدر ما هي مشروع إبستيمولوجي عرفاني.

1. مقاربة لايكوف ونوناز العرفانية لإشكاليّة أصل الرياضيات

يُعلن لايكوف (عالم لسانيات أميركي) ونوناز (عالم نفس أميركي) في مستهلّ مقدّمة كتابهما (أصل الرّياضيات) طبيعة مشروعهما إنطلاقًا من الدّواعي الإبستيمولوجية الموجبة لإنجاز هذا المشروع. فرغم تقدُّم علوم العرفان في مجالات عديدة، وهي علوم تدرس طبيعة الأفكار وبناها، ظلّت الأفكار الرياضيّة بمعزل عن كلّ تناول عرفاني. ويؤكّد الباحثان، حرصًا على الدقّة في رسم ملامح المشروع، أنّ أهميّته متأتّية من أهميّة الرّياضيات في حياة الناس. فالرّياضيات حقل فيه من العمق والجمال والنّجاعة ما يجعل الحاجة إلى استكشاف طبيعة الأفكار فيه حاجة تُعبِّر عن نفسها بوضوح. وليس مدار المشروع على نظام الرّموز في الرياضيات، إذ هي لا تعدو أن تكون رموزًا، وإنّما على الأفكار الرّياضيّة ذاتها، وهي من بنات عقول البشر. ولكنّ لا مُعوّل على الرّياضيات في دراسة الأفكار الرّياضيّة دراسة عرفانيّة لأنّها غير مؤهَّلة لذلك. فتلك مهمّة علوم الأعصاب والعلوم العرفانيّة.

فالعلماء الذين يشتغلون بالمباحث العرفانيّة يعلمون أنَّ الأفكار الريّاضيّة ليست، كما قد يبدو لبعض الناس، واضحة إلى حدّ البداهة، وأنّها تعني تمامًا ما أرادها الرّياضيّون أن تعنيه. هذه الأفكار والمفاهيم الرّياضيّة، شأنها شأن جميع الأفكار الإنسانيّة، متجذّرة في الخبرة الحسيّة الحركيّة التي هي مصدر جميع الآليّات العرفانيّة كالإستعارات التّصوّريّة. (لايكوف ونونيز، 2000، XIIص). ومن الأسئلة الأوّليّة في أفق هذا المشروع النظري الذي يضع الرّياضيات على طاولة التشريح العرفاني: من أين أتت قوانين علم الحساب (الأرثماطيقا)؟ ونظريّة المجموعات، ما أصلها، وما منشؤها؟ كيف نتقبَّل أن تكون المجموعة الجزئيّة الفارغة جزءًا من جميع المجموعات الممكنة إن لم تكن جزءًا من أيّ شيء على الإطلاق؟ (ص XIII). ولا يمكن، من المنظور العرفاني، الجواب عن هذه الأسئلة من خلال وضع نسق يتضمّن تعريفات ومسلّمات ومبرهنات. وذلك أنَّ هذه التّعريفات والمسلّمات ليست هي نفسها إلّا مفاهيم قابلة للدّرس تحت مجهر العلم العرفاني. وتظلّ تقنيات البحث العرفاني هي الأدوات المثلى لكي نفهم الآليّات التي بها نفهم. وهذه الآليّات، في غالب أحوالها، آليّات عميقة ثاوية في لاوعينا المعرفي، وليس للبشر إلّا قدرة محدودة على سبرها وإستكشافها.

ويسترسل لايكوف ونوناز في مقدّمة كتابهما حول أصل الرياضيات في الكشف عن الضّمنيات التي تحكم النظرة السائدة إلى الرياضيات. إنّها رؤية أفلاطونيّة فاتنة أخّاذة. ولكنّها أقرب إلى الأسطورة أو إلى العقيدة. فالرّياضيات، في المنظور الأفلاطوني، تتمتّع بوجود موضوعي متعال عن مقاصد العقل الإنساني وتحكم نظام الطّبيعة والكون، بحيث يكون تعلُّم الرياضيات بحدّ ذاته تعلُّمًا للغة الطّبيعة. فهي، لذلك، حقائق لا تتشكَّل بواسطة العقل وإنّما تُكتشف إكتشافًا. والتّصوُّر الأفلاطوني للرّياضيات لا يعدو أن يكون عقيدة محضة تمتنع البرهنة عليها شأنها شأن الإعتقاد في وجود إله للكون مع إمتناع البرهنة على وجوده علميًّا. وبإزاء ذلك، يُبيِّن التَّحليل العلمي العرفاني للأفكار الرّياضيّة أنَّ الرّياضيّات تشكَّلت داخل أدمغة البشر على مرّ التّاريخ بواسطة إستعارات تصوّريّة، بل إنَّ هذه الإستعارات تُكوِّن أكبر جزءٍ من الصَّرح المفهومي الرّياضي. والإستعارة التصوّريّة هي كلّ تمثّل أو فهم للموضوعات المجرَّدة بواسطة موضوعات حسيّة (ص4). نقترح المثال 1 لنشرح مفهوم الإستعارات التصوّريّة المتجسّدة.

مثال1 : الجسد عائق أمام الفكر.

في معالجة هذا المثال الإختباري يتوصَّل التّحليل غير العرفاني إلى إعتبار الجسد والفكر ثنائيّة يقع حدّاها على طَرفَي التنافر. ولكنّ التّحليل العرفاني يُبيِّن أنَّ الإستعارة التّصوّريّة توحِّد الفكر والجسد من خلال تمثّل الفكر بواسطة "جسم يتحرَّك على مسار متّجهًا إلى الأمام". وهو أحد الأمثلة الممكنة عن الفكر المتجسِّد (Embodied mind)[1]. ذلك الفكر المتجسِّد أو المتجذِّر في التجربة الفيزيائيّة الحسيّة لا يتجلّى في التّواصل باللّغة فحسب وإنّما هو سمة ثابتة في الفكر الرّياضي أيضًا. ومن الأمثلة الواضحة على ذلك أنّ الأعداد، وهي مفاهيم مجرَّدة، تُمثّل تمثيلًا حسيًّا بوصفها نقاطًا مسترسلة على خطّ مستقيم. وينبّه لايكوف ونوناز لطبيعة هذه الإستعارات التصوّرية التي تُبَنينُ الأفكار الرياضيّة بصفتها جزءًا من

الفكر الرياضي المتجذر في التجربة المتجسِّدة، وليست مجرد آليّات توضيحية لا غاية منها سوى تذليل صعوبات فهم الأفكار الرياضية (ص6).

ولقد أضفى تقدُّم البحوث في العلوم العصبيّة مزيدًا من الوضوح على فهم آليّات التّفكير الإنساني. وتعدُّ نتائج هذا العلم أسسًا معرفيّة للتصوُّر العرفاني للإستعارة. واتّسع المفهوم وامتدّ من مجال البلاغة، حيث تتبوّأ الإستعارة منزلة عليا في جماليّة التّعبير بالكلام وما يتبع ذلك من توظيف الظواهر الأسلوبية والوجوه البلاغيّة، إلى مجال التّفكير وبَنينة الأفكار وتَمثّل المفاهيم المجرّدة من خلال مفاهيم أخرى على نحو لا يُستثنى منه أيّ مجال يتجلّى فيه الفكر الإنساني (نفسه). ولا تعني الطّبيعة العرفانية التي تكتسيها الإستعارة في مجال التّفكير الرّياضي أنَّ المفهوم الواحد يُبنْيَن بواسطة إستعارة واحدة بعينها لا يتعدّاها إلى ما سواها. فالعدد يُفهم على أنّه نقطة واقعة على خطّ مستقيم كما يُفهم على أنّه مجموعة. وذلك أنَّ سؤالنا عن الصفر مثلًا، هل هو نقطة على خطّ لا نهائي من النّقاط يُمثّل جميع الأعداد، أم هو مجموعة فارغة، أم هو عدد وكفى؟ هو سؤال لا ينحصر الجواب عنه في إحتمال واحد، بل يحتمل الإمكانات الثلاث بحسب المجال الرّياضي الذي نتمثّل فيه هذا الموجود الذهني. بل يمكن أن تركب الإستعارةُ الإستعارةَ في تمثّل المفهوم الرياضي الواحد أو في العمل الحسابي الواحد. وتلك بعض أسئلة الفرع المختصّ بالرياضيات من العلم العرفاني. فإليه يعود تصنيف الإستعارات ودرجة تركّبها في الأرثماطيقا مثلًا.

وعلى سبيل التمهيد للشروع في معالجة إشكاليّة بحثنا ذات الصّلة بالإستعارات التّصوّريّة المُبنْينة للأرثماطيقا وخوارزميّاتها التّقليدية، ونعني بها الجمع والطّرح والضرب والقسمة، يهمّنا، لأجل تسليط الضوء على بنية مشروع لايكوف ونوناز العرفاني حول أصل الرّياضيات، أن نبسط عرضًا موجزًا لموضوعات الأقسام الستّة التي يتألّف منها الكتاب. ويمكن القول إنّ موضوع نظرنا في هذا البحث يتقيَّد بنتائج الفصول الأربعة الأولى، وهي قوام القسم الأوّل من الكتاب، لإنحصار موضوعها في الأرثماطيقا في جانبها الفطري وجانبها الإستعاري التّصوّري كما قدّمهما وحللّهما لايكوف ونوناز وصولًا إلى الجواب عن الطّبيعة الإستعاريّة لعمليّات الأرثماطيقا الأربع. وأمّا القسم الثاني (الفصول الخامس والسّادس والسّابع)، فمتعلّق البحث فيه بالإستعارات المتجذّرة (grounding) والمفهمة (conceptualization) ذاتيْ الصّلة بنظريّة المجموعات والمنطق والجبر البنيوي (abstract algebra) كنظريّة الزُّمر. وينظر القسم الثّالث المؤلَّف من الفصول (الثامن إلى الحادي عشر) في مفهوم اللانهاية وحساب النّهايات وأسسه الإستعاريّة. ويتعلّق القسم الرّابع (من الفصل الثاني عشر إلى الفصل الرّابع عشر) بالإستتباعات المنطقيّة للتّحليلات (المجراة في الفصل الثالث) على مسألة إستمراريّة الدّوالّ وعلى مفهوم الأعداد الحقيقيّة. ويتعلّق القسم الخامس (الفصلان الخامس عشر والسّادس عشر) بمناقشة نتائج القسم الرابع من أجل بيان تجسُّد الفكر الرّياضي، ومن أجل تحديد معالم فلسفة جديدة للرّياضيات. وأمّا القسم السّادس، وهو آخر فصول الكتاب، فيتعلّق بدراسة حالات تشمل مناقشة الطّبيعة الإستعاريّة في معادلة أويلر الشهيرة: $e^{i\pi} + 1 = 0$ ، وفي الهندسة التّحليليّة وحساب المثلّثات والأعداد المتخيّلة.

ينهضُ الفصل الأوّل (تجسّد الأرثماطيقا الأساسيّة) على السؤال التالي: ما هي الأفكار الرّياضيّة البسيطة التي عليها بُني صرح الرّياضيّات؟ وبعبارة أخرى: ما طبيعة هذه الأفكار التي يُمكن لنا أن نوسِّعها بحيث نتوصَّل إلى مباحث مثل قوانين الأرثماطيقا ونظريّة المجموعات والمنطق وحساب المثلّثات وحسابَي التّكامل والتّفاضل والأعداد المتخيّلة واللانهاية على إختلاف أنواعها؟ (ص15). والجواب يكمنُ في تلك القدرات والإستعدادات الفطرية التي يولد عليها بنو البشر، فتُتيح لهم تمييز الكميات المحدودة والفوارق بينها عند الزّيادة والنّقصان، كما أثبتت ذلك تجارب علماء الأعصاب وعلماء النّفس (ص16). ومنها القدرة الفطرية على التعرُّف البصريّ على العدد (subitizing)[2] أو "العدّ بالبديهة"، أي إدراك العدد دون تأمّل. وتثبت التّجارب المجراة على الفئران (ميشنر، 1959) أنَّه يمكن تعليم الفئران إجراء عملية ضغط على قفل داخل القفص أربع مرّات للحصول على الطّعام. وقد توصلتِ البحوثُ إلى أنَّ الحيوانات العليا، وبعض الحيوانات الأخرى، تتمتّع بقدرة رضيع بشريّ عمره دون أربعة أشهر ونصف على العدّ (ص21). وعلى سبيل الإجمال، فإنّ القدرات البسيطة التي هي شرط إمكان المستوى القاعدي غير المعقَّد من الأرثماطيقا، تتمثّل في العدّ بالبديهة وإدراك العلاقات الحسابيّة الأوّليّة البسيطة والقدرة على التّقدير التقريبي لعدد عناصر في مجموعة كبيرة من الأشياء، والقدرة على إستعمال الرّموز وإجراء العمليّات الحسابيّة، وتخزين بعض الجداول في الذاكرة (ص26). ولكنّ هذه القدرات البسيطة ليست ذات بال إذا قورنت بسعة مجال الرّياضيات والحلول والبراهين المعقّدة التي تُجرى على بعض المسائل الرياضية. فكيف إذن حدثت تلك النّقلة المهولة من القدرات الفطريّة والأوّليّة إلى الرّياضيات المتقدّمة بالغة التّعقيد؟ وما

هي الآليّات العرفانيّة التي تحقّقت من خلالها هذه النّقلة؟

تتوزّع هذه الآليّات العرفانيّة على أربعة أنماط: الخطاطات الصّور (image schemas)، والخطاطات المظاهر (aspectual schemas)، والإستعارة التّصوّريّة (conceptual metaphor)، والمزج التصوّري (conceptual blends). ومن بين هذه الآليّات الأربع يهتمّ بحثنا بالإستعارات التصوّريّة المتحكّمة في قوانين الأرثماطيقا وعملياتها. وفيما يهمّ القدرات التي تحتاج إليها الأرثماطيقا، كما يرد في سياقات متعدّدة من القسم الأوّل من الكتاب، فإنّ هذا البحث يضيق عن عرض جميعها بالتّفصيل (ص51)، ونذكر منها على سبيل الإختصار: القدرة على التّجميع (grouping capacity). فلكي نُميِّز ما نعدّه، وُجب علينا تجميع المعدودات بواسطة البصر أو من خلال التحسُّس باللّمس أو ذهنيًّا. والقدرة على التّرتيب (ordering capacity)، وذلك أنَّ الأشياء في العالم لا توجد، مثل أصابع اليد، على نظم طبيعي. فالأشياء تحتاجُ من العادّ إلى أن يُرتِّبها، على نحو ما، في سلسلة معدودات، كترتيب الأصابع أو منتظمة إنتظام أشياء على إمتداد مسار. والقدرة على عقد إقترانات في أزواج (pairing capacity)، وذلك بعقد إقتران بين كلّ إصبع مفرد وكلّ معدود مفرد. والقدرة على التَّخزين في الذاكرة (memory capacity)، وذلك أننا نحتفظ في ذاكرتنا بكلّ ما تمّ عدّه في سلسلة المعدودات. ولكنّ العدّ ليس إلّا عتبة الأرثماطيقا. فلإجراء العمليات الأرثماطيقيّة نحتاج إلى قدرات أخرى أهمّها إثنتان: القدرة على التّصوّر الإستعاري (metaphorizing capacity)، وذلك من خلال تصوُّر الأعداد والعمليّات الحسابية إستعاريًا في علاقة بالتجربة على أنّها تجميعات أشياء أو من خلال مفهوم الحركة أو الموقع على مسار، والقدرة على المزج التّصوّري (conceptual–blending capacity)، مثل الرّبط بين العدّ بالبديهة (subitizing) والعدّ بالتأمّل (counting)، ومثل تركيب إستعارات مختلفة لبناء إستعارة مركّبة (ص52). وهما قدرتان من أهمّ القدرات الإستعاريّة التي تُتيح للفكر البشري المتجسِّد الإنتقال من القدرات الأوّليّة الفطريّة إلى قوانين الأرثماطيقا وخوارزمياتها الحسابيّة.

تُظهر العمليات الحسابيّة آليّات إشتغال إستعارات الأرثماطيقا. وهي إستعارات متجذّرة أو لنقل إستعارات مغروزة (grounded). وهي أربعة أنواع: (ص ص52ـ53)

ـ إستعارة الأرثماطيقا تجميعة أشياء،

(Arithmetic As Object Collection).

ـ إستعارة الأرثماطيقا بناء أشياء،

(Arithmetic As Object Construction).

ـ إستعارة عصا القيس، (The Mesuring Stick).

ـ إستعارة الحركة على إمتداد مسار،

(Arithmetic As Motion Along a Path).

2. النّظام العددي العشري وطبيعته الإستعاريّة

ويُلاحظ في وضوح أنّ الإستعارة الأخيرة تتوافق مع التعريف الأرسطي للإستعارة من حيث إسقاط فكرة الحركة (النقل) على القيم التي تحتل منازل العدد عند إجراء أعمال الحساب: "نقل يتمُّ من الجنس إلى النّوع، أو من النّوع إلى الجنس، أو من النّوع إلى النّوع، أو بحسب التّمثيل". هذا التّوافق يمتدّ إلى المستوى المصطلحي من جهة وقوع لفظ "الإستعارة" في علم الحساب العربي على دلالة تختصّ بالطّرح. والشّرط في هذه الظّاهرة أن يكون رقم واحد، على الأقلّ، في سلسلة حدود المطروح أكبر من نظيره في سلسلة حدود المطروح منه. وذلك كما في:

مثال 2: 53 – 18 =

لقد وضعنا في (محنان، 2015) فرضيّة تتعلّق برجوع الإستعارة عرفانيًا وتصوّريًّا إلى إجراء الطّرح. وقيّدنا هذا الرّجوع بشرط وجود إنقلاب منازلي حيث تكون القيمة الواقعة في المنزلة (م) من المطروح منه أصغر من نظيرتها في المطروح. وذلك مثلما يُبيِّن المثال الإختباري أعلاه. فالوحدة (باللّون الأحمر في التّمثيل) المستعارة (للرقم المستعار له) تكون بمقدار وحدة من وحدات المنزلة اللاحقة (في العدد المطروح منه). في هذه الآليّة الأرثماطيقيّة تُعبِّر الإستعارة عن نفسها تصوّريًّا بصفتها مفهومًا نابعًا من المعنى التّداولي (معنى العارية في معجم العربية). والمعنى المعجمي متّصل بمعنى النّقل، أي نقل الشيء لتمليك المنفعة. (محنان، 2015، ص498). يُشير التّعريف المعجمي في لسان العرب بوضوح إلى تجسُّد مفهوم الإستعارة "إستعار فلان سهمًا من كنانته، رفعه وحوَّله منها إلى يده" (لسان العرب، ص718).

إنَّ تجسُّد الأرثماطيقا وطبيعتها الإستعاريّة يظهران في آليات إشتغال النظام العددي. وذلك فضلًا عن جميع التّوسيعات التي إقترحها العرفانيون للإستعارات الأرثماطيقيّة أو التي يمكن أن تجيء بها أبحاثهم في المستقبل. والنّظام العشري نظام متجسِّد نشأ من ممارسة العدّ على أصابع اليد. ومن ذلك تسميته بالنّظام العشري. والعدد في هذا النّظام ينتظم وفق منازل تساوي الوَحدة في كلّ منزلة عشرة من وحدات المنزلة التي تسبقها في سلسلة العدد. وهذا أوّل مظهر إستعاري فيه. فمفهوم المنزلة متولِّد إستعاريًّا لكونه يشتغل من خلال خرق التّراتب الكمّي الذي تحدّده المواضعة للقيم التي تمثلها الرّموز

(الأرقام) من صفر إلى تسعة. وقد عبَّرنا في (محنان، 2023) عن أنَّ الطّفل الذي يتعلّم العدّ يشعر بصدمة عندما يتلقّى تعليمة حول تراتب المنازل العدديّة في النّظام العشري.

مثال3: 169

سيُعلّم الطّفل أنَّ الترتيب المنازلي يقتضي أنّ 1 أكبر من 6 وأنّ 6 أكبر من 9. وسيستنتج أنَّ 1 أكبر من 9. وهذا يعني أنَّ ترتيب الأرقام من حيث دلالتها على الكميّات إنقلب رأسًا على عقب. وعندما يقرُّ الجميع في بيئات التعليم، كالمعلّم والأبوين والإخوة الأكبر سنًّا، نوعًا من المعقوليّة لهذا الذي يجده الطفل "تناقضًا واضحًا"، فإنَّه بلا شكّ سيشعر بأنّ نظام العدّ يُعاني من مشكلة ما، وأنَّ عالم الكبار قائم على التّناقض والتّعقيد. من هنا يمكن أن تنشأ الصّدمة إزاء الأعداد ومنطقها "غير المنسجم مع نفسه". ويمكن أن تتطوّر المشكلة لتتحوَّل إلى رهاب إزاء الأعداد والحساب. ويرتبط الأمر بمحدوديّة القدرة على التّصوّر الإستعاري لدى الطّفل، وعدم فهم المعلّم وأفراد الأسرة للنّظام العددي المنازلي على أنّه نظام إستعاري. ودون أن نغفل عن فضائل النّظام العددي العشري في تطوّر العلوم على مرّ التّاريخ، وخصوصًا بعد ظهور مفهوم الصفر وإحتلاله منازل في التّمثيل الرّمزي للأعداد، فإنّنا نسجّل نوعًا من النّزاع بين الكتابة والمشافهة فيما يخصُّ تمثيل العدد. فلحظة التأمّل عند محاولة الطّفل قراءة العدد 50، على سبيل المثال، تفضي إلى السؤال حول مفهوم الصفر (المنعدم). حيث لا يبدو ممكنًا تصوُّر أيّ موجب منطقي لوجود فارق كمّي بين 5 و50 لمجرّد أنَّ صفرًا (عدمًا) كُتِب على يمين الرقم 5. يقفز هذا السؤال الثاوي في أعماق الذاكرة إلى الوعي في مرحلة لاحقة حين يتعلّم الأطفال الأعداد العشريّة مع القاعدة التي تلهج بها ألسنة المعلّمين: "لا قيمة للصّفر على يمين الفاصل".

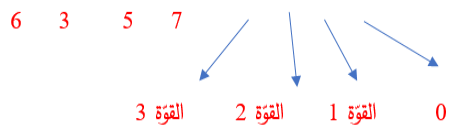
إنّ في قراءة العدد في صيغته الرّقمية الكتابيّة خروجًا من الرّمزيّة وإستعادة للّغة الطّبيعيّة. فنظام اللّغة النّحوي يضبط قواعد العدد ويحدد بنيته التّركيبيّة وصلته النّحويّة بمعدوده. فلا يوجد أداء شفهي للتّمثيل الرّمزي بغير اللّغة الطّبيعيّة. والتّمثيل اللغوي الطبيعي صوتيًا كان أو كتابيًا (دوفال، 1993) أدنى كلفة من النّاحية العرفانية إذا قورن بتمثيل العدد في سجلّ رمزي. وذلك أنَّ إسم العدد الأصلي (cardinal) يتضمّن أدوات العطف (العدد المعطوف) ويستثني الصّفر في التمثيل الصوتي والكتابي:

مثال4: 70102 (**سبعون ألفًا ومائة واثنان**).

وقراءة العدد في صيغته الرّمزيّة جهد تحويلي من سجلّ سيميولوجي إلى سجلّ آخر (دوفال، 2006) أو هي ترجمة بين نظامين سيميولوجيين (محنان، 2024). وما لم تُراع في مسار بناء العمليّة التّعليميّة متطلّبات هذا التّحويل، فإنّ الطّفل يختار الإحتماء باللّغة الطّبيعيّة والنّفور من كلّ تمثيل شكليّ. هكذا تبدأ مشكلة تصنيف المتعلّمين إلى ذوي ميول علمية بالفطرة وذوي ميول أدبيّة. وفهم الطّبيعة الإستعاريّة التّصوّريّة بالغة التّجريد، بدءًا من كتابة العدد إلى حلّ المعادلات المعقدة، هي بداية السبيل إلى تذليل صعوبات التّمثّل والإستدلال في الرّياضيات.

إنّ في قدرة المتعلّم الطّفل على قراءة عدد من النّظام العشري المنازلي مُتكوِّن من منزلتين فما أكثر دليل على تمام إستعداده الفطري للأرثماطيقا، ولتملّك قواعدها وتقنيات إجراء العمليّات الأرثماطيقيّة. فبنية النّظام العددي المنازلي معقّدة ومُبنينة إستعاريًّا بحيث، هي في الآن نفسه، ذات سطح وعمق. العدد في النّظام العشري، كما في سائر الأنظمة المنازليّة، يظهر في صورة سلسلة من الأرقام المتتابعة، ولكنّه في العمق عمليّة حسابيّة تُجرى وفق آليّات عرفانية ثاوية في عمق اللاشعور. هي عمليّة تجتمع فيها خوارزميّتا الضرب والقوّة، إذ قارئ العدد يضرب تصاعديًّا في عشرة مرفوعة إلى قوّة مساوية لمرتبة المنزلة بدءًا من القوّة صفر لمنزلة الآحاد. (لايكوف ونونيز، 2000، ص83).

مثال5:



مفهوما الضّرب والقوّة، من منظور مقاربة لايكوف ونوناز العرفانية يرتبطان بتوسيع لإستعارات الجمع المتجذّرة في التّجربة. ففي التّجربة الفيزيائيّة يمكن تجميع أشياء وتفريقها (الجمع والطّرح)، ولكن لا توجد إمكانيّة لضرب أشياء في بعضها أو رفعها إلى قوّة ما. لذلك، من المشروع لنا أن نتساءل عن قدرة الأرثماطيقا على التّعامل مع العدد مجرّدًا من معدوده. ففي عمليّتَي الجمع والطّرح يقترن كلّ حدّ بمعدوده.

مثال6: 10 تفاحات + 5 تفاحات

10 تفاحات – خمس تفاحات

ولكن لا يستقيم في الضرب والقسمة تعيين معدودات الحدود.

مثال7: 10 تفاحات في 5 تفاحات[3]*

* 10 تفاحات: 5 تفاحات

هذه الأمثلة الإختباريّة التي عرضناها في 6 و7 تُحدِّد طبيعة السّؤال عن المعدود في خوارزميّتَي الضّرب والقسمة: ما هو معدود المضروب فيه (multiplier) ومعدود المقسوم عليه

(divisor) إذا كان الضرب والقسمة لا يقبلان تكرار معدود المضروب (multiplicand) ومعدود المقسوم (dividend) على التوالي؟

كثيرًا ما تُبنى مسائل الحساب في السياقات التّعليمية على أفعال الهبة مثل (أعطى، أهدى، وهب، منح...). وهذه الإستراتيجيا التّعليمية التي تبني مفهوم الضرب بواسطة مفهوم المنح ليست هي الآليّة التّصوّريّة الـمُبنْينة للعلاقة بين العدد والمعدود في حدود الضرب. وذلك أنّنا، إذا اِستبدلنا المثال الإختباري 7 بالمثال 8 فإنّنا نتوصل إلى خطأ تمثيلي:

مثال8: 10* تفاحات × 5 أشخاص.

إذا اِفترضنا أنَّ النتيجة = 50 تفّاحة، فإنّ هذا المثال يخرق الخاصيّة التّبديليّة في الضّرب.

مثال9: * 5 أشخاص × 10 تفاحات = 50 شخصًا.

فلا علاقة للآليّة التصوّريّة الـمُبنْينة لخوارزميّة الضّرب بفكرة "المنح".

في خوارزميّة الضرب يوجد معدود واحد أصلي يمكن أن يتقلّب في الأدوار بين المضروب والمضروب فيه (الخاصيّة التّبديليّة). وذلك أنَّ الإستعارة الـمُبنينة للضرب إن هي إلّا توسيع لخوارزمية الجمع حيث لا يُجمع إلّا ما كان من جنس واحد. ويُشكِّل العدد ومعدوده من النّاحية الأنطولوجية والمنطقيّة علاقة تلازميّة، فلا عدد بلا معدود. وهذه العلاقة بينهما قائمة على مبدأ وحدة الجنس أو مفهوم العنصر النّوعي. (وهو المبدأ نفسه الذي يقوم عليه مفهوم المجموعة. ومن الواضح أنَّ اِستعارة الجمع (اِستعارة العدد تجميعة من الأشياء)، كما قدَّمها لايكوف ونوناز، تحتاج إلى الإشارة إلى هذا التّقييد بفكرة التّجانس بين أفراد المعدود. فذلك يعني أنَّ العدّ مبنيّ على آليّة عرفانيّة هي آليّة مَقْولة الأشياء (Categorization) موضوع العدّ، أي إدراجها ضمن مقولة ما.

3. مناقشة الأُسس النّظريّة في مقاربة لايكوف ونوناز

تضفي فكرة فهم الضرب بواسطة فكرة التّكرار مزيدًا من الوضوح على تمثّلنا للآليّة الإستعاريّة المتحكّمة في بَنينة خوارزميّة الضّرب[4]. فعند قراءة العمليّة تُحوَّل علامة الضرب (×) سيميولوجيًا في اللّغة الفرنسيّة إلى لفظ (fois)، وفي الإنكليزية إلى لفظ (times). هكذا يُفهم الضرب على أنّه يتعلّق بعدد مرّات تكرار مجموعة عناصر تمثّلها مقولة ما. فالضرب حالة خاصّة من الجمع تتعلّق بجمع متساويات عددًا ما من المرات. ولكن فكرة التّكرار توضّح في أذهاننا مسألة رجوع الضرب إلى الجمع، ولا تُفسِّر الآليّة التّصوّريّة التي يتمّ من خلالها الإنتقال إلى الضرب. ولهذا، فالسّؤال عن المعدود في حدّي الضّرب جدير بأن يُعاد طرحه. فإذا كان الضرب، كما يعلن لايكوف ونوناز، خوارزميّة تُبنينُها آليّة عرفانية موسَّعة بواسطة المزج الإستعاري، فلماذا تتقلّص البنية المعدوديّة في الضرب بحسب ما يُستنتج من خطأ الأمثلة الإختباريّة 7 و8 و9؟

تُشكِّل البنى المختزلة صعوبة أمام التّحليل. ويُعدُّ الضّرب خوارزميّة مختزلة من جهة البنية المعدوديّة كما رأينا. وإذا كانت فكرة التّكرار وجيهة في فهم الآليّة التي من خلالها نتصوَّر الضّرب، فإنّ مفهوم "المرّة"، الذي يُعبِّر عن التّكرار، يبقى مفهومًا ذا طبيعة حدَثيّة متزمّنة، كما تشير إلى ذلك بوضوح اللّغة الإنكليزيّة (times). وهو، فيما يبدو، من رواسب المراحل الأولى التي اِنتقل خلالها الفكر البشري من الأرثماطيقا الفطريّة إلى الرّياضيات المتقدّمة. وهذه الرّواسب يمكن أن تكون مفهومية كما قد تكون أيضًا لفظيّة. ومنها أنَّ لفظ "الحساب" في العربيّة يرجع في الإشتقاق إلى مادّة (ح. ص. ب)، ومنها الحصب أي الحجارة الصغيرة. ومنها رجوع فعل "أحصى" إلى مادّة (ح. ص. ي) في اِرتباط واضح بإستعمال الحصى في العدّ.

يُفيدنا درس نظام اللّغة الصرفيّ أنَّ لأسماء العدد صيغ جمع. وينطبق هذا على أسماء المنازل العدديّة في النّظام العشري (الآحاد، العشرات، المئات...). ومن ذلك نستنتج وجود آليّة اِستعاريّة لفهم العدد على أنّه معدود. "وإذا عدّ عدد فردٌ عددًا زوجًا عدّده بعدّة عدد زوج. وإذا عدّ عددٌ فردٌ عددًا زوجًا فإنّه يعُدّ أيضًا نصفه"[5]. وفي الجبر تتّضح هذه الآليّة في عبارة تستعمل فيها المتغيّرات مثل:

مثال10: 2x + 5y

في هذه العبارة يُضرب المجهول X في 2 والمجهول Y في 5 دون توسُّط علامة الضّرب بين الحدّين في التمثيل السيميولوجي الكتابي. وهي الآليّة الإختزاليّة نفسها التي تُبنين عمليّة ضرب الأعداد في مزج اِستعاريّ تنتهي فيه عمليّة الضَرب إلى بنية تتكوَّن من عددٍ ومعدود مع خاصيّة تركيبيّة في المعدود. هذه الخاصيّة تتعلّق بتحويل المعدود اِستعاريًّا إلى مركّب من عدد ومعدود. 10 × 5 تفّاحات = عشرةُ خمسِ تفّاحات.

يساعدُ القوسان في التمثيل السيميولوجي على فهم بنيَـنَة الضرب بهذا المزج الإستعاري. وتساعدُ علامات الإعراب على ذلك أيضًا في وسم مُكوّنَي تركيب الإضافة لنتبيَّن تماثل بنية خوارزميّة الضرب مع بنية المركّب الإضافي. وتظهر في التّمثيل مجموعة المجموعات الجزئيّة: مجموعة من عشر مجموعات جزئيّة في كلّ مجموعة جزئيّة خمسة عناصر.

مثال11: عشرةُ (خمسِ تُفّاحاتٍ).

بحسب المثال الإختباري 10، تبدو علامة الضّرب زائدة سيميولوجيّة أو هي مجرّد تمثيل رمزي لراسب شفاهي يشيرُ إلى مرحلة من مراحل تطوُّر سيميولوجيا الأرثماطيقا. لذلك يبقى وجود الرمز ضروريًا عندما تكون الحدود ممثلة بالأرقام، وتنتفي الحاجة إليها عند إستعمال المتغيرات. ولكن، إذا كان التّمثيل 11 لعمليّة الضرب وجيهًا، فإنّ التّقنية المستعملة في الضرب هي مرحلة أو طور عرفاني في مسار بَنينة العدد إستعاريًّا بواسطة بناء عدد معدودُه مركّبٌ من عدد ومعدود. وفي حالة تعدُّد حدود الضّرب، لا تمنحنا اللغة ما يمكن أن يوازي بنيويًا عبارة متعدّدة الحدود مثل 12:

مثال12: $4 \times 3 \times 7 \times 5 + 6 \times 2$

حيث لا نجد في الإستعمال اللغوي عبارة:

مثال13: [خمسُ (سبعِ (ثلاث (أربع تفّاحات)))] مكافئًا دلاليًا لـ14:

مثال14: أربعمائة وعشرون تفاحة.

ولا يسمح مجال هذا البحث بتعميق النّظر في العلاقة بين العبارتين اللغويّة والعددية من وجهة نظر عرفانيّة، إلّا أنَّ ذلك يُثير سؤالين يجدر بهما أن يمثّلا لنا جزءًا من إشكالية بحث مستقلّ[6].

ـ كيف يمكن لنظريّة المجموعات، ومخططات فان (Venn diagrams) أن تكون أساسًا نظريًا وتمثيليًا لهذه العلاقة؟

ـ كيف نُفسِّر إرتباط الشيء المعدود بالحدّ الأخير من حدود الضرب؟ وأيّة علاقة لذلك بإرتباط التّعويض في الطّرح بآخر منزلة في المجال الإستعاري (metaphorization Interval)، كما بيَّنه (محنان، 2023).

إنّ توسيع إستعارة الأرثماطيقا تجميعة من الأشياء من خلال المزج الإستعاري الذي يُبنين عمليّة الضرب ليس إلّا أحد الوجوه الممكنة لفهم خوارزمية الضرب وفق مقاربة عرفانية. وقد بيَّنت التقاليد الأرثماطيقيّة الهنديّة (الرّياضيات الفيديّة) والعربيّة أنَّ الخوارزميّات الحسابيّة تتداخل فيما بينها بحيث يمكن إجراء الضّرب بواسطة الطّرح والجمع معًا. فطريقة اليَكْدَست، التي تذكرها مصادر الرياضيات العربية، منها رسالة الكافية في الحساب للزنجاني[7] تقوم على إجراء الضرب بواسطة طرح كلّ من المضروب والمضروب فيه من الأساس 10. وفي الخطوة الموالية يُضرب الباقيان في بعضهما. فالآحاد في الجذاء الحاصل هي آحاد النتيجة المطلوبة. ثمّ يُجمع الحدّان. وتُجعل قيمة آحاد مجموعهما في منزلة العشرات من الجذاء المطلوب. مثال ذلك:

مثال15: 8×7

المرحلة الأولى: نطرح الحدّ الأوّل 7 من الأساس العشري يكنْ لنا 3. نطرح الحدّ الثاني 8 من الأساس العشري يكنْ لنا 2. نضرب الباقيين من الطّرحين في بعضهما هكذا: 2×3 يكن لنا 6. فلنجعل 6 آحادًا للجذاء المطلوب.

المرحلة الثانية: نحوّل حَدَّي الضرب إلى حَدَّي جمع هكذا: $7 + 8$ يكن لنا 15. فنجعل آحاد المجموع في منزلة العشرات من الجذاء المطلوب، تكنْ لنا 56.

وفي المصادر العربيّة طرق مختلفة لإجراء الضرب وإختصاره وإجراء سائر أعمال الحساب وإستخراج الجذور. ومنها أعمال عبدالوهاب الزّنجاني وكمال الدين الفارسي وابن البناء المرّاكشي وغيرهم. وهي أعمال تحتاج من الدَّرس الدّلالي إلى لفتة وإهتمام. وقد حفظ التّاريخ لبعضهم أعمالًا في البلاغة والعروض مثل كتاب الرّوض المريع في صناعة البديع لِابن البنّاء العددي المراكشي، وكتاب معيار النظّار في علوم الأشعار للزّنجاني. وفي آفاق البحث الدّلالي فرص واعدة لدراسة هذه المصادر من منظور عرفاني تضفي مزيدًا من الوضوح على الآليّات الـمُبنينة للمفاهيم الرياضيّة والخوارزميّات الحسابيّة.

خاتمة

تُعتبر نظريّة لايكوف ونوناز العرفانية حول أصل الرّياضيات لحظة بالغة الأهميّة في تاريخ إبستيمولوجيا الرّياضيات وتاريخ العلوم وفلسفتها. وتوجد إشارات في أكثر من سياق إلى أهمّيتها وقدرتها على تذليل صعوبات تعليم العلوم الرّياضيّة. وتُعدُّ الأُسس العلمية والتّجريبية التي تستندُ إليها هذه النّظريّة، أي علم الأعصاب والعلوم العرفانية، أسسًا متينة. ولكن، هل تكفي تلك الأُسس لترتقي بهذه النّظريّة إلى مصافّ العلم؟ أم هل هي إعلان ولادة إبستيمولوجيا عرفانية تُحلِّل الآليات المبنينة للأفكار الرياضيّة؟ وما هي الخيارات المنهجيّة الأمثل لمناقشة هذه المقاربة؟

يمكن الإنطلاق من طبيعة الأرضيّة المتحرّكة التي يقف عليها علم الأعصاب والإكتشافات التي ما تنفكّ تُغيِّر نظرة المختصين إلى النشاط العصبي ووظائف المناطق العصبية فضلًا عن تداخل هذه الوظائف بالجوانب الحسية والحركية، كما يمكن الإستناد إلى التأثير المتبادل بين الرياضيات والفيزياء وبين الرياضيات والمنطق لمناقشة "الصبغة العلمية" التي يريد لايكوف ونونيز إضفاءها على مقاربتهما العرفانيّة للرّياضيّات. ورغم أنَّ الطّبيعة الإستعاريّة في الأرثماطيقا، وفي مجالات أخرى من الرّياضيات واضحة المعالم، فإنّ إختزال الإستعارة التّصوّريّة في أنّها "تَصوّر مفهوم مجرّد بواسطة شيء ما حسّي"، يبقى مجرّد تعريف حدسي أو موقف نظري نابع

من منظور فلسفي لا يرتقي إلى صرامة الرّياضيات. والموقف الإبستيمولوجي الذي يصدر عنه الباحثان فيما يتصل بعجز الرياضيات عن اِتخاذ نفسها موضوعًا للدرس والتحليل أو أداة للفهم، يُحدِّد أفقًا نهائيًا للرّياضيات وللعقل في آن واحد. وذلك لأنّه موقف مبنيّ، من جهة أولى، على مسح محدود للمنجز الرّياضي لا يتعدّى المباحث التي طوّرها التّقليد الرّياضي الغربي، دون اِلتفات إلى التّقاليد الرّياضيّة الهنديّة والعربية، ومبنيّ من جهة ثانية، على اِستبعاد إمكان قيام مباحث ميتارياضيّة من داخل الرياضيات تُفسِّر آليّات التّفكير الرياضي، أو في الحدّ الأدنى، تساعد على تفسيرها. وينتظر أن تكون لمناقشات مشروع لايكوف ونونيز العرفاني حول الرياضيات فوائد لا تقلّ أهميّة عن الإضافة الكبيرة التي أتى بها مشروعهما الفكري.

د. عمـاد محـنان

المعهد العالي للعلوم الإنسانية جندوبة، جامعة جندوبة، قسم التربية والتعليم

الهوامش

Metaphorical thought. For the most part, human beings (1) conceptualize abstract concepts in concrete terms, using ideas and modes of reasoning grounded in the sensory-motor system. The mechanism by which the abstract is comprehended in terms of the concrete is called conceptual metaphor. Mathematical thought also makes use of conceptual metaphor, as when we conceptualize numbers as points on a line (Lakoff et Nunez, 2000, p. 5).

(2) لم نقع في الدراسات العربية على مقابل لهذا المصطلح غير "التعرّف البصري على العدد". وبالنظر إلى ملاحظة لايكوف ونوناز (ص ص02-12)، فإنّ الموضوع لا يزال خلافيًا ولا يُعرف على وجه اليقين إن كانت قدرة البشر على التّعرّف على أعداد الأشياء إذا كانت دون الخمسة هي من قبيل العدّ أو تعرّفًا تلقائيًّا دون تأمّل. ويمكن أن نجد في المصطلح البصري (الإدراك بالبداهة) مقابلًا مناسبًا لهذا المصطلح ذي الأصول اللاتينية (neddus). وذلك إذا جاز لنا قياس إدراك العدد على قراءة اللفظ المكتوب وفق مقاربة اِبن الهيثم البصريّة. أُنظر كتاب المناظر، ص381.

(3) نُشير بالرّمز * إلى خطأ العمليّة أو طريقة الكتابة.

But with multiplication, we do need to refer to numbers» (4) and collections simultaneously, since understanding multiplication in terms of collections requires performing operations on collections a certain number of times. This cannot be done in a domain with collections alone or numbers alone. In this respect, multiplication is cognitively more complex than addition or subtraction. The cognitive mechanism that allows us to extend this metaphor from addition and subtraction to multiplication and division is metaphoric blending». (Lakoff et Nunez, 2000. P. 60).

(5) وهذا ما يظهر في الرياضيات العربيّة كما في رسالة اِبن الليث (أبو الجود) إلى أحمد بن محمد الغازي في المثلثات القائمة الزوايا المنطقة الأضلاع وخواصها. وهي مخطوطة قيد التّحقيق للنشر ضمن كتاب "المثلثات القائمة الزّوايا العددية في الرياضيات العربية" من تحقيق وتحليل سيف الدّين التومي. أُنظر في ذلك أعمال مؤرِّخ الرياضيات العربيّة الباحث التونسي سيف الدين التومي، وخاصّة ما تعلّق بتحقيق رسائل لنصير الدّين الطّوسي وأبي اللّيث وعبدالوهاب الزنجاني والشهرزوري قيد المراجعة والإعداد للنشر.

(6) أُنظر أيضًا مقالنا بعنوان: (Les mécanismed métaphoriques des algorithmes)، قيد التّحكيم ضمن أشغال ندوة جمعيّة تعليمية الرياضيات التونسيّة عدد 41، المنعقد في 62 ديسمبر 3202 بالمعهد التحضيري للدّراسات الهندسية بالمنار، تونس.

(7) سيف الدّين التومي (5202)، الحساب الهوائي في الرياضيات العربية، مركز جمعة الماجد، الإمارات، 5202.

المراجع

- اِبن البنّاء المرّاكشي (5891)، الرّوض المريع في صناعة البديع، تح رضوان بنشقرون، ط1 دار النّشر المغربيّة، الرّباط، المغرب.
- اِبن منظور (0002)، لسان العرب، دار الكتب العلمية، بيروت، لبنان.
- اِبن الهيثم (3891)، كتاب المناظر: المقالات 1-2-3 في الإبصار على الاِستقامة، تح. عبدالحميد صبره، ط1، الكويت.
- سيف الدّين التومي (5202)، الحساب الهوائي في الرياضيات العربية، مركز جمعة الماجد، الإمارات العربيّة المتّحدة.
- عماد محنان (5102)، تحليل الخطاب الهندسي في التّراث العربي: خصائص الكتابة بين آليّات التّفكير وأبنية اللّغة، ط1 دار كنوز المعرفة، عمّان، الأردن.
- Bachelard, G. (1934). Le Nouvel Esprit scientifique, Paris, Alcan.
- Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique, Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 5, pp. 37-65.
- Duval, R. (2006), A cognitive analysis of problems in comprehension in a learning of mathematics, Educational studies in mathematics 61.1: pp. 103-131.
- Fauvel, 1, (1988) Cartesian and Euclidean rhetoric For the Learning of Mathematics 8(2), pp. 25-29.
- Konstantin, C. & Coulange, L. (2022). Sens et interprétation du signe « = » du point de vue d'élèves de 6-7 ans. Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2022, Numéro thématique 1 (Tome 1), p. 5-42.
- Lakoff et Johnson. (1980). Metaphors we live by, University of Chicago Press.
- Lakoff, George and Rafael E. N˙u˜nez (2000), Where Mathematics Comes From. New York: Basic Books.
- Lakoff, George and Rafael E. N˙u˜nez (1997) The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics. Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images. Ed. L. English. Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp 21–89.
- Lakoff, George and Mark Turner (1989). More Than Cool Reason. Chicago: U of Chicago P.
- Laurence, Stephen and Eric Margolis (1999). "Concepts and Cognitive Science." Concepts: Core Readings. Ed. Eric Margolis and Stephen Laurence. Cambridge: MIT Press.
- Mahnane Imad (2023). Métaphore et soustraction, Association Tunisienne de Didactique des Mathématiques (ATDM), Pp. 63-72. HAL Id: hal-04369823 https://hal.science/hal-04369823.
- Mahnane Imad (2024). L'énoncé mathématique: Quand lire c'est traduire, in Traduire les sciences, traduire les arts: traduire la culture, 2024, pp. 135-150.
- Yvon Keromnes. Les Métaphores - et leur tra. - dans la vie quotidienne. Revue SEPTET, 2013, 5, pp. 68-87. ffhal- 00944651.